Concursul Interjudeţean de Matematică "Cristian S. Calude"

Proba pe echipe, clasele IX-XII

27 octombrie 2013

RUNDA I

Problema 1. Se consideră numerele raţionale strict pozitive $r_1, r_2, r_3, ..., r_{2013}$ cu $r_1 + r_2 + r_3 + ... + r_{2013} = 1$ şi funcţia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, f(n) = \sum_{k=1}^{2013} \{r_k \cdot n\}$. Să se determine valoarea maximă a funcţiei f. ($\{a\}$ este partea fracţionară a numărului real a).

Problema 2. Fie $x, y, z > 0$. Să se determine minimul expresiei $\frac{16 \cdot x}{y+z} + \frac{9 \cdot y}{x+z} + \frac{36 \cdot z}{x+y}$.

Problema 3. Să se rezolve în $\mathbb{R}_+^*$ ecuaţia $(\text{arctg x})^2 + \left(\text{arctg } \frac{1}{\text{x}}\right)^2 = \frac{13 \cdot \pi^2}{72}$.

Problema 4. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ un şir de numere reale definit prin $a_1 = 2$ şi $n \cdot a_{n+1} = (2 \cdot n + 2) \cdot (a_n + n \cdot 2^n), n \geq 1$. Să se calculeze $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n^2]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot ... \cdot a_n}$.